UNIVERZITET U ZENICI
POLITEHNIČKI FAKULTET

Zadaci za pripremu polaganja kvalifikacionog ispita iz Matematike

1. Riješiti jednačine:

a) $-5x^4 = 0.$

b) $\left(x^2-2\right)^3 = 0.$

c) $\sqrt{x+3}+\sqrt{22-x} = 7.$

č) $10^{2\log 3} = 8x^2+5.$

ć) $2\sin^4 x - 2\cos^4 x - 1 = 0.$

d) $5\cos^2 x - 16\cos x + 3 = 0.$

dž) $\left|1-|x|\right| = 1-|x|.$

đ) $|x|+|2-x| = 3.$

e) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7.$

f) $(\log x)^2 - 2\log(10x) = 6.$

g) $\log(x-9) + 2\log\sqrt{2x-1} = 2.$

h) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x}+\sqrt{x+1} = -2.$

i) $\cos 2x = \sin x.$

j) $(x-4)^2 = 1.$

k) $\cos 2x = \cos^2 x.$

l) $4\sin^2 2x = 1.$

lj) $\dfrac{1}{x(x+2)} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{12}.$

m) $\cos^2 x = 1-\sin x.$

n) $x = \dfrac{8}{x-2}.$

nj) $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0.$

o) $5^{2x+1} - 5^{2x-1} = 120.$

p) $9^{2x+5} = 27\cdot 3^{x-1}.$

r) $5^x - 5^{3-x} = 20.$

s) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6.$

š) $\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6.$

t) $9x^2 + (4x-1)^2 = (5x+1)^2.$

u) $0,6^x \cdot \left(\dfrac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\dfrac{27}{125}\right)^3.$

v) $2+\sqrt{x^2+1} = x.$

z) $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}} + \sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}} = 1.$

ž) $3\cdot 16^x + 2\cdot 81^x = 5\cdot 36^x.$

2. Riješiti nejednačine:

a) $2^{x-1}-2^{x-3}>3^{x-2}-3^{x-3}.$

b) $\log_{0,5}\left(x^2-1\right)>\log_{\frac{1}{2}}3.$

c) $4^{x-1}+4^x+4^{x+1}<84.$

č) $\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}\geq 1.$

ć) $-(x-1)^2+2<1.$

d) $\frac{5x+2}{x-3}<2.$

dž) $x^3-4x>\left(x^2-2x\right)(2x+3).$

đ) $\left|x^3+2x^2-1\right|>-2.$

e) $\sin(2\pi x)<0.$

f) $(x-1)^3+x^3+(x+1)^3<3x^3+x^2-x+12.$

g) $2x^4<0.$

h) $2x^4+3>1.$

i) $\frac{-2x^2+9x+5}{x^2+2x+1}<0.$

j) $x+1>\sqrt{5-x}.$

k) $\log_{2x}\left(x^2+1\right)<1.$

l) $\left|x^2-1\right|<3.$

lj) $\sqrt{x+7}>2x-1.$

m) $\frac{1}{2^{2x}+3}\geq\frac{1}{2^{x+2}-1}.$

n) $3^{\left|x^2-x\right|}<9.$

nj) $\cos^2 x>1+\sin^2 x.$

o) $\cos^2 x>\sin^2 x.$

p) $4\cos^2 x>3.$

r) $\left|x^2-3x-4\right|>2x+2.$

s) $\cos(2x)>\cos x.$

š) $\frac{1}{\log x}+\frac{1}{1-\log x}>1.$

t) $\log_{\frac{1}{2}}x-6\log_x\frac{1}{2}+1>0.$

u) $\log_3\left(x^2-x+3\right)<2.$

v) $\frac{3x^2+6x-9}{2x+1}\geq x+1.$

z) $\left(x^2-4x\right)^2\leq 1.$

ž) $25^x<6\cdot 5^x-5.$

3. Izračunati:

a) $\log_{\frac{1}{9}}\left(\log_2\frac{1}{2}\cdot\log_{\frac{1}{2}}8\right).$

b) $\sqrt{3}+3\sqrt{27}-2\sqrt{48}.$

c) $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right).$

d) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2.$

e) $\left(1-\sin\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\sin\frac{\pi}{8}\right).$

f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+0,2^{-4}\cdot 25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}.$

g) $\log_a\left(\sin\frac{5\pi}{2}\cdot\sqrt[3]{a^8}\right)+\log_8\left(2\cos^2\left(10\pi\right)\right).$

h) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}\right):\frac{1}{\sqrt{3}}.$

i) $2\cos 75^0\cos 15^0.$

j) $\log_{\sqrt{3}}9+8\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}-\left(2,734\right)^0.$

k) $\sin\frac{11\pi}{6}+\log 0,01+8^{\frac{2}{3}}.$

l) $3^{2-2\log_3 2}-tg\frac{3\pi}{4}+16^{0,75}.$

m) $tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$

n) $\sin\left(30^0+\alpha\right)+\sin\left(30^0-\alpha\right).$

4. Nacrtati grafik funkcije:

a) $y=2x^2-1.$

b) $x=2y^2-1.$

c) $y=x^2-3x.$

d) $y=\left|x^2-3x\right|.$

e) $y^2=2x+1.$

f) $x=2y^2+y+1.$

g) $y=a^x,\ 0<a\neq 1.$

h) $y=\log_a x,\ 0<a\neq 1.$

i) $y=\left|\log_a x\right|,\ 0<a\neq 1.$

j) $y=|x-3|+|x+2|.$

k) $y=|x|+|x-1|+|x+1|.$

l) $y=\sin x, y=\sin\left(2x\right), y=2\sin\left(4x\right).$

m) $y=\cos x, y=\cos\left(3x\right), y=-3\cos\left(2x\right).$

n) $y=\sqrt{1-x^2}$.
o) $x^2+y^2-4x+2y-4=0$.
p) $2x^2+3y^2=18$.
r) $x=-\sqrt{1+2y^2}$.

5. Riješiti sisteme jednačina:
a) $x^2+y^2=34 \wedge xy=-15$.
b) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{13}{6} \wedge x^2+y^2=13$.
c) $6x^2-13xy+6y^2=0 \wedge x^2-3xy+y^2=-5$.
d) $2x^2-3xy+2y^2=4 \wedge x^2+xy+y^2=7$.
e) $x^2-xy-2y^2=18 \wedge x^2-3xy-y^2=9$.
f) $x+y+xy=19 \wedge x^2y+xy^2=84$.
g) $x^2+xy+y^2=4 \wedge x+xy+y=2$.
h) $x^3-y^3=19(x-y) \wedge x^3+y^3=7(x+y)$.
i) $x^3+y^3=19 \wedge x^2+y^2=13$.
j) $x^3+y^3=5 \wedge xy(x+y)=1$.

6. Izračunati površinu trougla kome su poznate dužine stranica $a=4, b=5$ i ugao između njih $\gamma=60^0$.
7. Izračunati površinu pravouglog trougla ako je poznata visina na hipotenuzu $h=\frac{48}{5}$ cm i jedna kateta $a=16$ cm.
8. U jednakokrakom trouglu poznata je dužina osnovice $a=12$ i dužina visine na osnovicu $h=8$. Iz podnožja te visine povučena je okomica na krak. Izračunati dužinu te okomice i dužine odsječaka koje ta okomica gradi na kraku.
9. U pravouglom trouglu je poznat oštri ugao $\beta=30^0$ i nalegla kateta $a=12$. Izračunati preostale stranice i površinu trougla.
10. Izračunati površinu i visine paralelograma čije su dijagonale dužina $d_1=26, d_2=30$ a jedna stranica $a=14$.
11. Izračunati površinu romba ako je njegova stranica $a=8$ i oštri ugao $\alpha=45^0$.
12. Obim romba je $O=10$, a dijagonale su mu u omjeru 3:4. Izračunati površinu i visinu romba.
13. U jednakokrakom trapezu dijagonala $d=16$ i krak $b=12$ zaklapaju pravi ugao. Izračunati osnovice i površinu trapeza.
14. Oko jednakokrakog trapeza čije su osnovice $a=14$ i $c=2$, a krak $b=10$, opisan je krug. Izračunati površinu trapeza i površinu kruga.
15. Tetivi $\overline{AB}$ kruga $K(O,6)$ odgovara centralni ugao $\varphi=30^0$. Izračunati dužinu tetive $\overline{AB}$, površinu trougla AOB i površinu kružnog odsječka AOB.
16. Izvesti i napisati što detaljnije formulu za računanje površine i zapremine:
    a) pravouglog paralelopipeda
    b) trostrane uspravne prizme
    c) pravilne šestostrane uspravne prizme
    d) pravilne trostrane piramide
    e) pravilne četverostrane piramide

f) uspravne kupe
g) uspravnog valjka

Rješenja izabranih zadataka:

1. a) $-5x^4=0 \Rightarrow x^4=0 \Rightarrow x=0$ - rješenje višestrukosti 4.

f) $(\log x)^2-2\log(10x)=6 \Rightarrow (\log x)^2-2(\log 10+\log x)=6.$

Primjetimo da je jednačina definisana samo za $x>0.$ Ako uzmemo smjenu $\log x=t,$ jednačina postaje:

$t^2-2(1+t)=6 \Rightarrow t^2-2t-8=0 \Rightarrow t_1=-2 \wedge t_2=4.$

$\log x=-2 \Rightarrow x_1=10^{-2}=\frac{1}{100};$

$\log x=4 \Rightarrow x_2=10^4=10000.$

l) $4\sin^2 2x=1 \Rightarrow \sin^2 2x=\frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi \Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$

v) $2+\sqrt{x^2+1}=x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}=x-2.$

Jednačina je definisana za $x\geq 2.$ Kvadriranjem ćemo dobiti:

$x^2+1=(x-2)^2 \Rightarrow x^2+1=x^2-4x+4 \Rightarrow 4x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{4}.$

Ali, pošto je $\frac{3}{4}<2,$ jednačina nema rješenja.

2. dž) $x^3-4x>(x^2-2x)(2x+3) \Rightarrow x(x^2-4)>x(x-2)(2x+3)$

$\Rightarrow x(x-2)(x+2)>x(x-2)(2x+3) \Rightarrow x(x-2)(x+2-2x-3)>0$

$\Rightarrow x(x-2)(-x-1)>0.$

Ova nejednačina se jednostavno riješi pomoću tabele. Rješenje: $x\in(-\infty,-1)\cup(0,2).$

nj) $\cos^2 x>1+\sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x-\sin^2 x>1 \Rightarrow \cos 2x>1.$

Ova nejednačina očigledno nema rješenja.

ž) $25^x<6\cdot 5^x-5 \Rightarrow (5^x)^2-6\cdot 5^x+5<0.$

Uzećemo smjenu $5^x=t.$ Tada je: $t^2-6t+5<0.$

Pošto je $t^2-6t+5=0 \Leftrightarrow t\in\{1,5\},$ pomoću grafika kvadratne funkcije ili pomoću tabele zaključujemo da je $1<t<5.$ Dakle: $1<5^x<5 \Rightarrow 0<x<1.$

3. e) $\left(1-\sin\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\sin\frac{\pi}{8}\right)=1-\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{2\pi}{8}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}.$

j) $\log_{\sqrt{3}} 9+8\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}-(2,734)^0=\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^4+8\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)-1$

$=4-8\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}-1=4-8\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-1=-\frac{\sqrt{3}}{2}-1=\frac{-\sqrt{3}-2}{2}.$

5. c) Jednačinu $6x^2-13xy+6y^2=0$ podijelimo sa $y^2.$ Tada dobijamo:

$$6\left(\frac{y}{x}\right)^2-13\frac{y}{x}+6=0.$$

$$\frac{y}{x}=t\Rightarrow 6t^2-13t+6=0\Rightarrow t_1=\frac{2}{3},t_2=\frac{3}{2}.$$

Polazni sistem se svodi na dva jednostavna sistema.

$$\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-5 \\ \dfrac{y}{x}=\dfrac{2}{3} \end{cases} \text{ i } \begin{cases} x^2-3xy+y^2=-5 \\ \dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

U prvom sistemu je

$$y=\frac{2}{3}x\Rightarrow x^2-3x\cdot\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}x^2=-5\Rightarrow 9x^2-18x^2+4x^2=-45\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm 3.$$

Tako dobijemo dva rješenja sistema $(3,2)$ i $(-3,-2)$.

Na isti način iz drugog sistema dobijamo rješenja $(2,3)$ i $(-2,-3)$.

g) Uvedimo dvije nove promjenljive $u=x+y$ i $v=xy.$ tada se dobije sistem

$$\begin{cases} u+v=2 \\ u^2-v=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2-v \\ (2-v)^2-v=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2-v \\ v^2-5v=0. \end{cases}$$

Odatle se lako dobiju rješenja po u i v: $(u,v)=(2,0)$ i $(u,v)=(-3,5)$. Na kraju onda rješavamo sisteme:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=0 \end{cases} \text{ i } \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=5 \end{cases}.$$

Rješenja prvog su $(2,0)$ i $(0,2)$, a drugi sistem nema realnih rješenja.

11. Pošto je $\sin\alpha=\frac{h}{a}$, pri čemu je h visina romba, imamo da je

$$h=a\sin\alpha=8\sin 45^0=8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}.$$

Tražena površina romba je $P=ah=8\cdot 4\sqrt{2}=32\sqrt{2}.$

16. d) Površina pravilne trostrane piramide jednaka je:

$P=B+M=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}+\dfrac{3ah}{2}$, gdje je B – površina baze, M – površina omotača, a – dužina ivice baze, h – dužina bočne visine.

Zapremina pravilne trostrane piramide jednaka je:

$V=\dfrac{B\cdot H}{3}=\dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H}{3}=\dfrac{a^2\sqrt{3}H}{12}$. Pri tome je H dužina visine piramide.